

§ 20 Höhere (totale) Ableitungen, Extremwerte, Satz v. Taylor

Situation : X, Y $\mathbb{R}$ -V.R. mit
 $\dim < \infty$ (und beliebiger Norm)

U offen $\subset X$; $f : U \rightarrow Y$ sei
an jeder Stelle $a \in U$ total diff'bar

$\Rightarrow f'$ definiert eine Abbildung

$U \rightarrow L(X, Y)$:= Raum

der linearen Abbildungen

$X \rightarrow Y$ (irgendwie normiert,

z.B. mit Operator norm)

Spezialfall: $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ -2-

jedem $a \in U$ wird eine Matrix zugeordnet
 $\uparrow$ Jacobi

Def 20.1: Sei f wie oben.

i) Ist f' (total) diff'bar an einer Stelle $a \in U$, so heißt $(f')'(a)$ die 2^{te} Ableitung von f in a .

ia) f heißt auf U 2 mal diff'bar, wenn $(f')'(a)$ an jeder Stelle $a \in U$ existiert

Schreibweisen: $f''(a)$, $f^{(2)}(a)$, $\overset{2}{D}f(a)$

statt $(f')'(a)$

Interpretation von $f''(a)$:

-3-

Setze $Z := L(X, Y) \Rightarrow f''(a)$

ist per Def. lineare Abbildung

$X \rightarrow Z$, also:

$$f''(a) \in L(X, Z) = L(X, L(X, Y))$$

Sei $v \in X \Rightarrow f''(a)v \in L(X, Y)$,

man kann $f''(a)v$ auf einen weiteren

Vektor $w \in X$ anwenden $\Rightarrow$

$$(f''(a)v)w \in Y$$

Bem : ① $(f''(a)v)(w)$ ist linear
in v und w

② man schreibt

$$f''(a)(v, w) \quad \text{für} \quad (f''(a)v)(w)$$

und interpretiert $f''(a)$ als

Bilinearform $X \times X \rightarrow Y$

③ „Keine Angst“! es stellt sich heraus:

$$f''(a)(v, w) \underset{\uparrow}{=} f''(a)(w, v) \underset{\uparrow}{=} \partial_v (\partial_w f)(a)$$

Symmetrie

Formel zur
Berechnung

Vor dem Beweis von ③ ($\leadsto$ Satz 20.1)

noch die „allgemeine Situation“:

Rekursive Def. von k -maliger Diff'barkeit:

$U \subset X$ offen, $\dim X, Y < \infty$

Setze $Y_0 := Y$ und

$$Y_\ell := L(X, Y_{\ell-1}), \ell \geq 1$$

Man vereinbart (falls die Ableitung jeweils bildbar ist):

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{(1)} := f' : U \rightarrow L(X, Y) = Y_1, \\ f^{(k)} := (f^{(k-1)})' : U \rightarrow L(X, Y_{k-1}) \\ \qquad \qquad \qquad = Y_k \\ \text{für } k \geq 1 \end{array} \right.$$

$\varphi^{(k)}$
 $\varphi(a)$ kann aufgefasst werden als
 k -lineare Abbildung

$$\underbrace{X \times \dots \times X}_{k\text{-fach}} \longrightarrow Y$$

Def 20.2 : Mit obigen Bezeichnungen sei

$$C^0(U, Y) := \{ f: U \rightarrow Y \mid f \text{ stetig auf } U \}$$

$$C^1(U, Y) := \{ f: U \rightarrow Y \mid f' \text{ ist } \dots \},$$

$$\vdots$$

$$C^k(U, Y) := \{ f: U \rightarrow Y \mid f^{(k)} \text{ existiert} \\ \text{und ist stetig},$$

$$C^\infty(U, Y) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(U, Y).$$

$$C^k = k\text{-mal } \underline{\text{stetig}} \text{ diff'bar}$$

Wie für $U \subset \mathbb{R}$ ist

$$C^\infty \subsetneq C^k \subsetneq C^0$$

Zurück zu $f''(a)$:

Für $v, w \in X$ ist per Def

$$f''(a)(v, w) := \underbrace{\left(f''(a)v \right)}_{\in L(X, Y)}(w)$$

mit der ursprünglichen Notation

$$f''(a) := (f')'(a) : X \rightarrow L(X, Y)$$

als lineare Abbildung von X nach $L(X, Y)$

Satz 20.1 : Sei $U \subset X$ offen,
und $f: U \rightarrow Y$ sei 2-mal total
diff'bar an der Stelle $a \in U$. Dann
gilt für alle $v, w \in X$:

$$\left. \begin{aligned} f''(a)(v, w) &= \partial_w (\partial_v f)(a) = \\ \partial_v (\partial_w f)(a) &= f''(a)(w, v) \end{aligned} \right\}$$

$f''(a)$ kann also als symm. Bilinearform
angesehen werden.

Korollar : Sei f k -mal total
diff'bar auf U . Dann ist

$f^{(k)}(a)$ interpretierbar als

symmetrische k -lineare Abbildung

$X \times X \times \dots \times X \longrightarrow Y$ mit

$$f^{(k)}(a)(v_1, \dots, v_k) = \partial_{v_k} \left(\dots \left(\partial_{v_1} f \right) \dots \right) (a)$$

Bem : ① (Euklidischer Fall $X = \mathbb{R}^n$,
 $Y = \mathbb{R}^m$)

Wir wissen : Existenz von $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$

für alle i, j $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$

Satz 20.1 zeigt dagegen :

$$f^{(2)}(x) \text{ existiert} \implies \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (x)$$

(sinngemäß für höhere part. Ableitungen)

② im Euklidischen Fall ist nach 20.1

$$f''(a)(v, w) = \sum_{i,j=1}^n v_i w_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a),$$

für $\mathbb{R}$ -wertige f entspricht $f''(a)$

also die symmetrischen $n \times n$ Matrix

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad \underline{\text{Hesse-Matrix}}$$

③ Kriterien für die Existenz von
 $f^{(k)}(a) \leadsto \text{Satz 20.2}$

Beweis von Satz 20.1: Sei f 2 mal
total diff'bar in $a \in U \xRightarrow{\text{Def.}} f''(a)$

$$(1) \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{|v|} |f'(a+v) - f'(a) - f''(a)v| = 0,$$

wobei hier $f''(a)$ definitionsgemäß eine
lineare Abbildung $X \rightarrow L(X, Y)$ ist.

Man setzt : $\underbrace{(\text{Restglied})}''$

R_a : Nullumgebung in $X \rightarrow L(X, Y)$,

$$R_a(v) := \begin{cases} 0, & v = 0 \\ \frac{1}{|v|} (f'(a+v) - f'(a) - f''(a)v), & v \neq 0 \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow R_a$ stetig in 0 und

-12-

$$(2) \quad f'(a+v) - f'(a) - f''(a)v = R_a(v) |v|.$$

Seien jetzt $u, v \in X$ beliebig $\xRightarrow{t \neq 0, t \in \mathbb{R}}$

$$\frac{1}{t} \left[(\partial_u f)(a+tv) - (\partial_u f)(a) \right] \stackrel{=}{\uparrow} \begin{array}{c} \partial_u f(x) = \\ f'(x)(u) \end{array}$$

$$\frac{1}{t} \left[f'(a+tv)(u) - f'(a)(u) \right] \stackrel{=}{=} \begin{array}{c} (2) \text{ mit } tv \\ \text{statt } v \end{array}$$

$$\frac{1}{t} \left[|tv| R_a(tv)(u) + f''(a)(tv)u \right] =$$

$$|v| R_a(tv)(u) + (f''(a)v)u$$

Beachte : (2) ist eine Identität in $L(X, Y)$
für festes a und v ∇

Mit $t \rightarrow 0$ folgt die Formel

$$(3) \quad \partial_v (\partial_u f)(a) = (f''(a)v)u \quad \forall u, v \in X$$

Zu zeigen : (4) $\partial_v (\partial_u f)(a) = \partial_u (\partial_v f)(a)$

Mit (3) folgt dann Satz 20.1.

ad (4) : "heuristisch" ($\rho, t \in \mathbb{R} - \{0\}$ klein)

$$\begin{aligned} \partial_v (\partial_u f)(a) &\approx \frac{1}{t} \left[(\partial_u f)(a + tv) - (\partial_u f)(a) \right] \\ &\approx \frac{1}{t} \left[\frac{1}{\rho} \{ f(a + tv + \rho u) - f(a + tv) \} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\rho} \{ f(a + \rho u) - f(a) \} \right] \end{aligned}$$

$\xrightarrow{\text{wähle } \rho = t}$

$$\frac{1}{\rho^2} \left[f(a + \rho u + \rho v) - f(a + \rho v) \right. \\ \left. - f(a + \rho u) + f(a) \right]$$

$$=: \frac{1}{\rho^2} B_a(\rho u, \rho v)$$

($\tilde{u}, \tilde{v}$
beliebig
aus X)

Da der Term $B_a(\tilde{u}, \tilde{v})$ symmetrisch
in $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ ist, „folgt“ (4).

Strenger Beweis mit „lim“ statt $\approx$
benutzt die Restglieddarstellung. ($\rightarrow$ Skript) $\square$

Satz 20.2 : $\left(\begin{array}{l} \text{Kriterium für } k\text{-fache} \\ \text{stetige Diff'barkeit} \end{array} \right)$

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Dann sind äquivalent: